**Relación de problemas campo gravitatorio**

**Juan Bailén Guardia 2ºBC-A**

1. Io es un satélite de Júpiter cuya masa es $M\_{Io}=8.9∙10^{22}$kg y su radio $R\_{io}=1.8∙10^{6}$m. El radio de la órbita, supuesta circular, en torno a Júpiter es $r=4.2∙10^{8}$m.

$G=6.67∙10^{-11} N m^{2}kg^{-2}$;$ M\_{Júpiter}=1.9∙10^{27}kg$; $R\_{Júpiter}=6.9∙10^{7}m.$

1. ¿Cuál es el periodo de rotación de Io en torno a Júpiter?

El periodo de rotación puede calcularse mediante esta fórmula: $T=\frac{E\_{recorrido}}{V}$ ahora tenemos que tener en cuenta en el espacio recorrido es una órbita, su fórmula será: $E\_{recorrido}=2∙π∙r\_{orbita}$ , ahora sólo nos queda calcular la velocidad:

$$G∙\frac{M\_{j∙}m\_{Io}}{r^{2}}=m\_{Io}∙\frac{V^{2}}{r}$$

Ahora de esta ecuación podemos simplificarla:

$$V^{2}=\frac{G∙M\_{j}}{r}$$

$$V^{2}=\frac{6.67∙10^{-11}∙1.9∙10^{27}}{4.2∙10^{8}}$$

$$V^{2}=301738095 ^{m}/\_{s}$$

$$V=\sqrt{301738095}$$

$$V=17370 ^{m}/\_{s}$$

Ahora que ya tenemos la velocidad y el espacio recorrido, podemos calcular el periodo de rotación con la fórmula anterior:

$$T=\frac{2∙π∙4.2∙10^{8}}{17370}$$

$$T=151900 seg=421944 horas=1.8 dias$$

1. Determina la velocidad y la aceleración de Io en su órbita

Ya sabemos la velocidad porque la hemos calculado en el apartado anterior, $V=17370 ^{m}/\_{s}$ y en cuanto a la aceleración, sabemos que:

$F\_{centripeta}=m\_{Io}∙a\_{centripeta}$, de donde sabemos también que si despejamos la aceleración se nos queda una fórmula: $a\_{centripeta}=\frac{V^{2}}{r}$

$$a\_{centripeta}=\frac{17370^{2}}{4.2∙10^{8}}$$

$$a\_{centripeta}=0.72^{m}/\_{s}$$

1. Dos planetas esféricos tienen la misma mas,$M\_{1}=M\_{2}$, pero la aceleración de la gravedad en la superficie del primero es cuatro veces mayor que en la del segundo, $g\_{1}=4g\_{2}$. Calcula la relación entre los radios de los dos planetas, $R\_{1}/R\_{2}$, y entre sus densidades medias de masa, p1/p2.

En cuanto a la relación de los radios, lo que debemos de hacer una relación entre sus radios:

$g\_{1}=G∙\frac{M\_{1}}{R^{2}}$; $4g\_{2}=G∙\frac{M\_{2}}{R\_{1}^{2}}$

$g\_{2}=G∙\frac{M\_{2}}{R^{2}}$; $g\_{2}=G∙\frac{M\_{2}}{R\_{2}^{2}}$

Ahora establecemos la relación:

$$\frac{4g\_{2}}{g\_{2}}= \frac{G∙{M\_{2}}/{(R\_{1})^{2}}}{G∙{M\_{2}}/{(R\_{2})^{2}}}$$

De donde simplificamos y nos quedaría:

$$4=\frac{(R\_{1})^{2}}{(R\_{2})^{2}}$$

$\sqrt{4}=\sqrt{\frac{R\_{1}^{2}}{R\_{2}^{2}}}$; $2= \frac{R\_{1}}{R\_{2}}$

$$R\_{2}=2∙R\_{1}$$

Ahora para calcular la relación entre densidades, sabemos que $e=\frac{m}{vol}$, por lo que para calcular la densidad de un planeta esférico seria $e\_{planeta}=\frac{m}{^{4}/\_{3}∙π∙r^{3}}$, sabiendo la fórmula, sólo nos queda establecer la relación entre $\frac{e\_{1}}{e\_{2}}$:

$$\frac{e\_{1}}{e\_{2}}=\frac{\frac{m\_{1}}{^{4}/\_{3}∙π∙R\_{1}^{3}}}{\frac{m\_{1}}{^{4}/\_{3}∙π∙(2∙R\_{1)}^{3}}}$$

En esta relación podemos simplificarla y se nos quedaría:

$$\frac{e\_{1}}{e\_{2}}=2^{3}$$

$$e\_{1}=8∙e\_{2}$$

1. ¿A qué distancia de la Tierra su campo gravitatorio es equilibrado exactamente por el de la Luna? Los puntos en que esto sucede se llaman puntos de Lagrange. La distancia entre la Tierra y la Luna es de $3.84∙10^{8}m$ y la relación $\frac{m\_{t}}{m\_{l}}$=81.

Para encontrar ese punto, debemos de utilizar la siguiente fórmula:

$$G∙\frac{m\_{T}}{( Dist.\_{t-l}-x)^{2}}=G∙\frac{m\_{L}}{x^{2}}$$

De donde aquí podemos quitar la G y establecemos la relación $\frac{m\_{t}}{m\_{l}}$:

$$\frac{m\_{t}}{m\_{l}}=\frac{(dist\_{T,L}-x)^{2}}{x^{2}}$$

$$\sqrt{81}=\frac{3.84∙10^{8}}{x}-1$$

$$x=\frac{3.84∙10^{8}}{8}$$

$$x=4.8∙10^{7}m.$$

1. Un cuerpo A de masa $m\_{a}=1 kg$ y otro B de masa $m\_{b}=2kg$ se encuentran situados en los puntos (2.2) y (2.-2) respectivamente. Las coordenadas están expresadas en metros. Calcula:
2. El vector de intensidad de campo gravitatorio creado por el cuerpo A en el punto (-2.0)

Lo primero que debemos de hacer en este ejercicio es un gráfico mostrando los cuerpos y los puntos que nos piden:

Ahora que vemos lo que nos piden, sólo tenemos que calcular la intensidad con la fórmula:

$$\vec{EA}=-G∙\frac{m\_{a}}{r^{3}}∙\vec{r}$$

$$\vec{EA}=-6.67∙10^{-11}∙\frac{1}{\sqrt{2^{2}+4^{2}}^{3}}∙(-4\vec{i}-2\vec{j})$$

$$\vec{EA}=29.84∙10^{23}\vec{i}+14.92 ∙10^{-13}\vec{j}) ^{N}/\_{kg}$$

1. El vector de intensidad de campo gravitatorio creado por el cuerpo B en el punto (2.2)

Ahora sólo tenemos que aplicar la misma fórmula pero sabiendo que el vector no tiene coordenada $\vec{j}$

$$\vec{EB}=-G∙\frac{m\_{b}}{r^{3}}∙\vec{r}$$

$$\vec{EB}=-6.67∙10^{-11}∙\frac{2}{4^{3}}∙4\vec{i}$$

$$\vec{EB}=8.33∙10^{-12}i$$

1. La fuerza gravitatoria que ejerce el cuerpo A sobre el B. G= $6.67∙10^{-11} N∙m^{2}∙kg^{2}$



Para calcular la fuerza $\vec{F}$, sólo tenemos que aplicar la misma fórmula, pero cambiando los datos por los que nos dice este apartado.

$$\vec{F}=-G \frac{m\_{a}∙m\_{b}}{r^{3}}∙\vec{r}$$

$$\vec{F}=-6.67∙10^{-11}\frac{1∙2}{4^{3}}∙-4\vec{i}$$

$$\vec{F}=8.34∙10^{-12}^{N}/\_{kg}$$

1. Calcula el valor de la velocidad que hay que comunicar a un cuerpo en la superficie terrestre, en dirección horizontal, para que se mueva en torno a la Tierra describiendo una órbita circular ($R\_{t}=6.4∙10^{6}m; M\_{T}=5.91∙10^{24}kg.$

De donde sabemos que la fuerza de la gravedad es igual a la fuerza centrípeta, porque no existe otra fuerza que vaya a actuar al cuerpo, deducimos la siguiente ecuación:

$$G∙\frac{M\_{T∙m}}{R\_{T}^{2}}=m∙\frac{V^{2}}{R\_{T}}$$

Ahora simplificamos la ecuación: $G∙\frac{M\_{T}}{R\_{T}}=V^{2}$; $V=\sqrt{\frac{6.67∙10^{-11}∙5.97∙10^{24}}{6.4∙10^{6}}}$

$$V=7888^{m}/\_{s}$$

1. La Tierra es aproximadamente esférica de radio $R\_{T}=6.37∙10^{6}m.$ La intensidad del campo gravitatorio es $g\_{0}=9.81^{m}/\_{s}$; calcula:
2. La densidad media de masa media de la Tierra.

Donde sabemos que la fórmula de la densidad es $e=\frac{m\_{T}}{Vol\_{T}}$, que desarrollamos como$e=\frac{M\_{t}}{^{4}/\_{3}∙π∙R\_{T}^{2}}$,de donde sabemos que $\frac{m\_{T}}{R\_{T}^{3}}=g\_{0}$, lo que nos quedaría una ecuación:

$$g\_{0}=G∙\frac{4}{3}∙π∙e∙r\_{T}$$

Volvemos a despejar la densidad de aquí y nos queda

$$e=\frac{3∙g\_{0}}{4∙G∙π∙r\_{T}}$$

$$e=\frac{3∙9.81}{4∙6.67∙10^{-11}∙π∙6.37∙10^{6}}$$

$$e=5512^{kg}/\_{m^{3}}$$

1. ¿A qué altura *h* sobre la superficie de la Tierra se reduce g a la cuarta parte de $g\_{0}$?

Ahora tenemos que hacer una relación entre la gravedad de la Tierra en la superficie de la Tierra y la gravedad de la Tierra a la altura h:

$$g\_{0}=G∙\frac{m\_{T}}{r\_{T}^{2}}$$

$$\frac{g\_{0}}{4}=G∙\frac{m\_{T}}{(r\_{T}+h)^{2}}$$

$$\frac{g\_{0}}{^{g\_{0}}/\_{4}}=\frac{\frac{G∙m\_{T}}{r\_{T}^{2}}}{\frac{G∙m\_{T}}{(r\_{T}+H)^{2}}}$$

Ya solo nos queda simplificar la ecuación y nos quedaría

$$4=\left(\frac{r\_{T}+h}{r\_{T}}\right)^{2}$$

$$2=1+\frac{h}{r\_{T}}$$

$$r\_{T}=h$$

La distancia seria igual al radio de la Tierra.

1. El satélite meteorológico SMOS de masa m=683 kg sigue una órbita circular (polar) a una altura ha=755 km sobre la superficie terrestre.
2. Calcula la variación que experimentará el peso del satélite en la órbita respecto del que tiene en la superficie terrestre.

Para ello tenemos que calcular cuánto vale la fuerza de la gravedad en la órbita en la que esta es satélite:

$$\frac{g\_{0}}{g}=(\frac{1+h}{r\_{T}})^{2}$$

$$g=\frac{g\_{0}}{(\frac{1+h}{r\_{T}})^{2}}$$

$$g=\frac{9.81}{(\frac{1+7.55∙10^{5}}{6.37∙10^{6}})^{2}}$$

$$g=7.84^{N}/\_{kg}$$

Ahora que ya sabemos la fuerza de la gravedad en la órbita, calculamos el peso del satélite en la órbita:

$$P=m∙g;P=683∙7.84$$

$$P=5355 N$$

Ahora calculamos el peso del satélite en la superficie de la tierra

$$P\_{sup}=683∙9.81;P\_{sup}=6700 N$$

Ahora solo tenemos que calcular la variación de peso

$$∆P=P\_{sup}-P; ∆P=6700-5355$$

$$∆P=1345 N$$

1. Determina la velocidad orbital del satélite y el número de veces que recorrerá la órbita cada día.

De donde sabemos que la fórmula de la velocidad es:

$$V=\sqrt{\frac{G∙m\_{T}}{r\_{T}+h}}$$

$$V=\sqrt{\frac{6.67∙10^{-11}∙5.91∙10^{24}}{6.37∙10^{6}+7.55∙10^{5}}}$$

$$V=7476 ^{m}/\_{s}$$

Y para calcular el periodo, sólo tenemos que aplicar la ecuación de $T=\frac{E}{V}$

$$T=\frac{2∙π∙6.37∙10^{6}+7.55∙10^{5}}{7476}$$

$$T=5988.18 seg;T=1.66 horas$$

1. Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula y la desplaza, desde un punto $x\_{1}$ hasta otro $x\_{2}$, realizando un trabajo de 50 Julios.
2. Determina la variación de energía potencial de la partícula en ese desplazamiento. Si la energía potencial de la partícula es cero en $x\_{1}$¿Cuánto valdrá en $x\_{2}$?

Si sabemos que el trabajo de una fuerza conservativa y el trabajo de una fuerza externa son iguales, pero de signo opuesto, entonces:

$$W\_{c}=-∆Ep$$

$$50=-∆Ep$$

$$∆EP=-50 Julios$$

1. Si la partícula de 5g. se mueve bajo la influencia exclusiva de esa fuerza, partiendo del reposo en $x\_{1}$, ¿Cuál será la velocidad en $x\_{2}$? ¿Cuál será la variación de energía mecánica?

Para calcular la velocidad, utilizamos el principio de conservación de la energía:

$$∆Ec=-∆Ep$$

$Emec\_{1}=Emec\_{2}$, de donde la energía mecánica es:

$$Ec\_{1}+Ep\_{1}=Ec\_{2}+Ep\_{2}$$

De lo que sabemos que en momento $x\_{1}$ la partícula no tiene ni energía potencial ni energía cinética:

$$0+0=\frac{1}{2}∙5∙10^{-3}∙V^{2}+(-50)$$

$$V^{2}=\frac{50∙2}{5∙10^{-3}}$$

$$V=\sqrt{20000}$$

$$V=141.42 ^{m}/\_{s}$$

1. Dos masas puntuales $m\_{1}=5kg y m\_{2}=10 kg$ se encuentran situadas en el plano XY en dos puntos de coordenadas A (0.1) y B (0.7) respectivamente. Se pide:
2. Fuerza gravitatoria ejercida por la masa $m\_{1}$ sobre $m\_{2}$

Para calcular la fuerza gravitatoria primero hacemos el esquema y después calculamos por la fórmula:

$$\vec{F\_{m1-m2}}=-G∙\frac{m\_{1}∙m\_{2}}{r^{3}}∙\vec{r}$$

$$\vec{F\_{m1-m2}}=-6.67∙10^{-11}∙\frac{5∙10}{6^{3}}∙6\vec{j}$$

$$\vec{F\_{m1-m2}}=-9.2∙10^{-11}\vec{j}$$

1. Campo gravitatorio debido a los dos puntos de masas en el punto de coordenadas C(4.4)

De donde el vector $\vec{E}$, es la suma de $\vec{E\_{1}}+\vec{E\_{2}}$, lo que nos da que $\vec{E}=4\vec{i}+3\vec{j}$, lo que solo queda aplicar la fórmula anterior:

$$\vec{E}=-6.67∙10^{-11}∙\frac{5}{(\sqrt{4^{2}+3^{2}})^{2}}∙4\vec{i}+3\vec{j}$$

$$\vec{E}=-2.13∙10^{-12}\vec{i}-1.61∙10^{-12}\vec{j}$$

1. por último, calcula la energía potencial que posee la masa $m\_{2}$

Para calcular la energía potencial, sólo tenemos que aplicar su fórmula:

$$Ep\_{m2}=G∙\frac{m\_{1}∙m\_{2}}{\vec{r}}$$

$$Ep\_{m2}=6.67∙10^{-11}\frac{5∙10}{6}$$

$$Ep\_{m2}=5.56∙10^{-11} Julios$$

1. Un planeta esférico sin atmósfera tiene masa M= $1.2∙10^{23} kg y radio R=1.3∙10^{6}m$. Desde su superficie se lanza verticalmente un proyectil que llega a alcanzar una altura máxima h=R/2 antes de volver a caer hacia la superficie. ¿Con qué velocidad inicial se ha lanzado el proyectil? G= $6.7∙10^{-11} N∙m^{2}∙kg^{-2}$

Entonces solo tenemos que aplicar la fórmula $∆Ec=-∆Ep$, lo que desarrollándola queda:

$$Ec\_{2}-Ec\_{1}=Ep\_{2}-Ep\_{1}$$

Sabiendo que la $Ec\_{2}$=0 porque en el momento que llega a alcanzar la altura máxima, el proyectil no tiene movimiento. Operamos:

0-$\frac{1}{2}∙m∙V^{2}=-(-G∙\frac{m\_{Plan}∙m\_{Proy}}{r+h}-\left(-G∙\frac{m\_{Plan}∙m\_{Proy}}{r}\right))$

Simplificando la ecuación y despejando la $V^{2}$:

$$V^{2}=\frac{2∙G∙m\_{plan}}{r}∙\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+1\right)$$

$$V=\sqrt{\frac{10}{3}}∙\sqrt{∙\frac{6.67∙10^{-11}∙1.2∙10^{23}}{1.3∙10^{6}}}$$

$$V=2026 ^{m}/\_{s}$$

1. Los satélites de comunicaciones son geoestacionarios, es decir, describen órbitas ecuatoriales en torno a la Tierra con un periodo de revolución de un día, igual al de rotación de nuestro planeta. Por ello, la posición aparente de un satélite geoestacionario, visto desde la Tierra, es siempre la misma.
2. Calcula el radio de la órbita geoestacionaria y la velocidad orbital del satélite

Para calcular el radio debemos usar esta fórmula:

$$G∙\frac{M\_{T}∙m\_{sat}}{(Rt+h)^{2}}=m\_{sat}∙\frac{V^{2}}{Rt+h}$$

Como no sabemos el dato de la velocidad, tenemos que despejarlo de la ecuación:

$$V=\frac{e}{T}$$

$$V=\frac{2∙π∙R\_{orbita}}{24∙3600}$$

Ahora introducimos esta ecuación en la anterior:

$$R=\frac{G∙M∙(24∙3600)^{2}}{4∙π∙R^{2}}$$

$$R^{3}=\frac{G∙M∙(24∙3600)}{4∙π^{2}}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{6.67∙10^{-11}∙5.97∙10^{24}∙(24∙3600)^{2}}{4∙π^{2}}}$$

$$R=42∙10^{6}metros$$

Este radio que ha salido, es el radio de la Tierra más la distancia del satélite a la superficie de la Tierra.

En cuanto a la velocidad orbital del satélite:

$$V=\frac{2∙π∙R\_{orbita}}{24∙3600}$$

$$V=\frac{2∙π∙42∙10^{6}}{24∙3600}$$

$$V=3054^{m}/\_{s}$$

1. Calcula la energía mecánica de un satélite geoestacionario de masa= 500kg

Sabiendo que Emec= Ec+Ep, desarrollamos esta fórmula resolviendo la Emec.

$$Ec=\frac{1}{2}∙m∙v^{2}$$

$$Ec= \frac{1}{2}∙500∙3054^{2}$$

$$Ec=2.33∙10^{9}Julios$$

$$Ep=(-G∙\frac{m\_{T}∙m\_{SAT}}{R. órbita})$$

$$Ep=\left(-6.67∙10^{-11}∙\frac{5.97∙10^{24}∙500}{42∙10^{6}}\right)$$

$$Ep= -4.74∙10^{9}Julios$$

Sabiendo que la suma de la Ec+Ep nos da energía mecánica, operamos:

$$Emec=2.33∙10^{9}+(-4.74∙10^{9})$$

$$Emec=-2.4∙10^{9}Julios$$

1. Un meteorito se dirige hacia la Luna, de masa *ML* = 7,34·1022 kg y radio *RL* =1,74·106 m. A una altura *h* = 3*RL* sobre la superficie de la Luna, la velocidad del meteorito es *v*0 = 500 m/s. Calcula su velocidad cuando choca con la superficie. *G* = 6,67·10-11 N m2 kg-2.

Por el método de conservación de la energía sabemos que:

$$∆Ec=-∆Ep$$

$$Ec\_{2}-Ec\_{1}=-\left(Ep\_{2}-Ep\_{1}\right)$$

$$\frac{1}{2}∙m∙v^{2}-\frac{1}{2}∙500^{2}=-(-6.67∙10^{-11}∙\frac{7.34∙10^{22}∙m}{1.74∙10^{6}∙4})-(-6.67∙10^{-11}∙\frac{7.34∙10^{22}∙m}{1.74∙10^{6}})$$

$$v^{2}∙500^{2}=-\left(-6.67∙10^{-11}∙\frac{7.34∙10^{32}}{1.74∙10^{6}∙4}\right)-(-6.67∙10^{-11}∙\frac{7.34∙10^{22}}{1.74∙10^{6}})$$

De dónde despejamos la velocidad y nos da:

$$V=2114^{m}/\_{s}$$

1. a) Calcula la velocidad de escape desde la superficie de la Luna.G = 6,67·10-11 N m2 kg-2 . Masa y radio de la Luna: ML = 7,34·1022 kg, RL = 1,74·106 m.

Como el ejercicio anterior sabemos que:

$$∆Ec=-∆Ep$$

De donde sabemos que en el espacio la Ec y Ep valen 0, por ello $Ec\_{2}=0$, $Ep\_{2}$=0

$$∆Ec=Ec\_{2}-Ec\_{1}$$

$$∆Ec=0-\frac{1}{2}∙m∙v^{2}$$

$$∆Ep=Ep\_{2}-Ep\_{1}$$

$$∆Ep=0-(-6.67∙10^{-11}∙\frac{M\_{l}∙m}{r\_{L}})$$

Ahora unimos las dos ecuaciones:

$$-\frac{1}{2}∙m∙v^{2}= -(-G∙\frac{M\_{l}∙m}{r\_{L}})$$

Donde despejando la V:

$$V=\sqrt{\frac{2∙G∙m\_{L}}{r\_{l}}}$$

$$V=\sqrt{\frac{2∙6.67∙10^{-11}∙7.34∙10^{22}}{1.74∙10^{6}}}$$

$$V=2372^{m}/\_{s}$$

b) Se lanza verticalmente un objeto desde la superficie de la Luna, con velocidad inicial igual a la de escape. ¿A qué distancia del centro de la Luna se reduce su velocidad a la mitad de la inicial?

Ahora tenemos que seguir utilizando la misma relación:

$$∆Ec=∆Ep$$

De donde aplicamos los valores para cada dato:

$$\frac{1}{2}∙m∙\left(\frac{2372}{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}∙m∙2372^{2}=-\left(-\frac{6.67∙10^{-11}∙7.34∙10^{22}∙m}{1.74∙10^{6}+h}\right)-\left(-\frac{6.67∙10^{-11}∙7.34∙10^{22}∙m}{1.74∙10^{6}}\right)$$

De donde despejamos h y nos da:

$$h=6.96∙10^{28}m$$

1. Un satélite de masa m=500kg describe una órbita circular de radio en torno a la Tierra. $R=7.5∙10^{6}m$.
2. Calcula la velocidad orbital del satélite.

De donde sabemos que la fórmula de la velocidad es $V=\sqrt{\frac{G∙m\_{T}}{r}}$

De donde sustituimos con los datos que nos da el ejercicio:

$$V=\sqrt{\frac{6.67∙10^{-11}∙5.97∙10^{24}}{7.5∙10^{6}}}$$

$$V=7287^{m}/\_{s}$$

1. Para pasar a otra órbita circular de radio 2R, ¿Cuánto trabajo deben realizar los motores del satélite?

Ahora tenemos que tener en cuenta esta relación:

$$W\_{T}=W\_{FC}+W\_{NO CONS}$$

Lo que se corresponde con:

$$∆Ec=-∆Ep+W\_{motor}$$

Ahora despejamos el trabajo del motor

$$W\_{motor}=Ec\_{2}-Ec\_{1}+ Ep\_{2}-Ep\_{1}$$

De donde conocemos todos los datos, menos la velocidad de la energía cinética en el momento 2, vamos a calcularla:

$$V=\sqrt{\frac{6.67∙10^{-11}∙5.97∙10^{24}}{7.5∙10^{6}∙2}}$$

$$V=5152^{m}/\_{s}$$

Ahora que ya sabemos todos los datos, nos disponemos a operar la ecuación:

$$W\_{motor}=\frac{1}{2}∙500∙5152^{2}-\frac{1}{2}∙500∙7287^{2}+\left(-6.67∙10^{-11}∙\frac{5.97∙10^{24}∙500}{2∙7.5∙10^{6}}\right)—\left(-6.67∙10^{-11}∙\frac{5.97∙10^{24}∙500}{7.5∙10^{6}}\right)$$

$$W\_{motor}=250∙\left(5152^{2}-7287^{2}\right)+\frac{6.67∙10^{-11}∙5.91∙10^{24}∙500}{7.5∙10^{6}}∙\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$W\_{motor}=6.64∙10^{9} Julios$$

1. La relación entre los radios medios de las órbitas de Marte y la Tierra en torno al es $\frac{R\_{M}}{R\_{T}}=1.53$. Calcula el periodo de la órbita de Marte en torno al Sol (duración del año marciano)

Dada la 3º ley de Kepler que dice, cuanto más alejado del Sol se encuentre un planeta, más lenta será su marcha. Por ello hacemos la siguiente relación:

$$\frac{R\_{T}^{3}}{T\_{T}^{2}}=\frac{R\_{M}^{3}}{T\_{M}^{2}}$$

$$\frac{R\_{T}^{3}}{1^{2}}=\frac{153^{3}∙R\_{M}^{3}}{T\_{M}^{2}}$$

$$T\_{M}=\sqrt{153^{3}}$$

$$T\_{M}=1.89 año$$

1. Rhea y Titán son dos satélites de Saturno que tardan, respectivamente 4.52 y 15.9 días terrestres en recorrer sus órbitas en torno a dicho planeta. Sabiendo que el radio medio de la órbita de Rhea es $5.27∙10^{8}$m, calcula el radio medio de la órbita de Titán y la masa de Saturno.

Para calcular el radio de Titán solo tenemos que atender a la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T\_{R}^{2}}{R\_{R}^{3}}=\frac{T\_{T}^{2}}{R\_{T}^{3}}$$

$$\frac{4.52^{2}}{5.27∙10^{8}^{3}}=\frac{15.9^{2}}{R\_{T}^{3}}$$

$$R\_{T}=\sqrt[3]{\frac{5.27∙10^{8}^{3}∙\left(15.9^{2}\right)}{(4.52)^{2}}}$$

$$R\_{T}=1.22∙10^{9}m$$

En cuanto a la masa de Saturno:

$$G∙\frac{M\_{SAT}∙m}{R^{2}}=m∙\frac{V^{2}}{R}$$

De donde despejamos la masa de Saturno:

$$M\_{SAT}=\frac{V^{2}∙R}{G}$$

$$M\_{SAT}=\frac{4∙π^{2}∙R^{3}}{G∙T^{2}}$$

$$M\_{SAT}=\frac{4∙π^{2}∙5.27∙10^{8^{3}}}{6.67∙10^{-11}∙(4.52∙24∙3600)^{2}}$$

$$M\_{SAT}=5.69∙10^{26}kg$$

1. La órbita de Plutón entrono al Sol es notablemente excéntrica. La relación de distancias máxima y mínima entre su centro y el del Sol (afelio y perihelio) es Ra/Rp=5/3. Razonando tus respuestas, calcula la relación (cociente) entre los valores en el afelio y en el perihelio de las siguientes magnitudes de Plutón:
2. El momento angular respecto al centro del Sol.

Ahora sabemos que el momento angular o L es siempre constante, por tanto:

$$\frac{L\_{a}}{L\_{p}}=\frac{m∙V\_{a}∙R\_{a}}{m∙V\_{p}∙R\_{p}}$$

Donde simplificamos y se nos queda:

$$\frac{L\_{a}}{L\_{p}}=\frac{V\_{a}}{V\_{p}}∙\frac{5}{3}$$

Pero teniendo en cuenta que L es constante aún sin saber los valores de $V\_{a}$ y $V\_{p}$ puedo decir que $\frac{L\_{a}}{L\_{p}}=1$

1. Energía cinética.

Partiendo de la fórmula anterior, despejamos $V\_{p}$:

$$1=\frac{V\_{a}}{V\_{p}}∙\frac{5}{3}$$

$$V\_{p}=\frac{5}{3}∙V\_{a}$$

Ahora establecemos una relación entre las energías cinéticas de $V\_{a}$ y $V\_{p}$ :

$$Ec\_{a}=\frac{1}{2}∙m∙V\_{a}^{2}$$

$$Ec\_{p}=\frac{1}{2}∙m∙V\_{p}^{2}$$

$$\frac{Ec\_{a}}{Ec\_{p}}=\frac{^{1}/\_{2}∙m∙V\_{a}^{2}}{^{1}/\_{2}∙m∙(^{5}/\_{3}∙V\_{a})^{2}}$$

$$\frac{Ec\_{a}}{Ec\_{p}}=\frac{9}{25}$$

1. Energía potencial gravitatoria.

De donde sabemos que la energía potencial es:

$$E\_{p}=-G∙\frac{M\_{sol}∙m}{r}$$

$$Ep\_{a}=-G∙\frac{M\_{sol}∙m\_{pl}}{r\_{a}}$$

$$Ep\_{p}=-G∙\frac{M\_{sol}∙m\_{pl}}{r\_{p}}$$

De donde establecemos la relación $\frac{Ep\_{a}}{Ep\_{p}}$

$$\frac{Ep\_{a}}{Ep\_{p}}=\frac{r\_{p}}{r\_{a}}$$

$$\frac{Ep\_{a}}{Ep\_{p}}=\frac{5}{3}$$

1. Un satélite de la Tierra describe una órbita elíptica. La distancia máxima y mínima a la superficie de la Tierra son 3200km y 400km respectivamente. Si la velocidad máxima del satélite es de 5250 $^{m}/\_{s}$, halla la velocidad del satélite en los puntos de máximo y mínimo acercamiento. $(R\_{t}=6.4∙10^{6}m.)$

En este problema, sabemos que el momento angular es constante, y que la velocidad máxima del satélite se corresponde con la velocidad máxima en el perihelio, decimos que:

$$V\_{p}=5250^{m}/\_{s}$$

Ahora para hallar la velocidad máxima en el afelio, sólo tenemos que establecer la relación $L\_{1}=L\_{2}$:

$$r\_{1}∙m∙v\_{1}=r\_{2}∙m∙v\_{2}$$

Ahora solo queda poner los datos que da el ejercicio y despejar la velocidad del afelio ($v\_{1}$)

$$3.2∙10^{6}+6.4∙10^{6}∙v\_{1}=4∙10^{5}+6.4∙10^{6}∙5250$$

$$v\_{1}=\frac{4∙10^{5}+6.4∙10^{6}∙5250}{3.2∙10^{6}+6.4∙10^{6}}$$

$$v\_{p}=3719^{m}/\_{s}$$